



TITLE:

$\zeta(s)$ の値分布論(数論の解析的理論 : 最近の進展を中心にして)

AUTHOR(S):

松本, 耕二

---

CITATION:

松本, 耕二.  $\zeta(s)$ の値分布論(数論の解析的理論 : 最近の進展を中心にして). 数理解析研究所講究録 1985, 572: 37-68

ISSUE DATE:

1985-11

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/99191>

RIGHT:

$\zeta(s)$  の値分布論

立教大・理 松本耕二 (Kohji MATSUMOTO)

Riemann の  $\zeta$ -関数  $\zeta(s)$  ( $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$ ) は, 半平面  $\sigma > 1$  においては Dirichlet 級数  $\sum n^{-s}$  で定義され, さらに Euler 積表示をもつ:

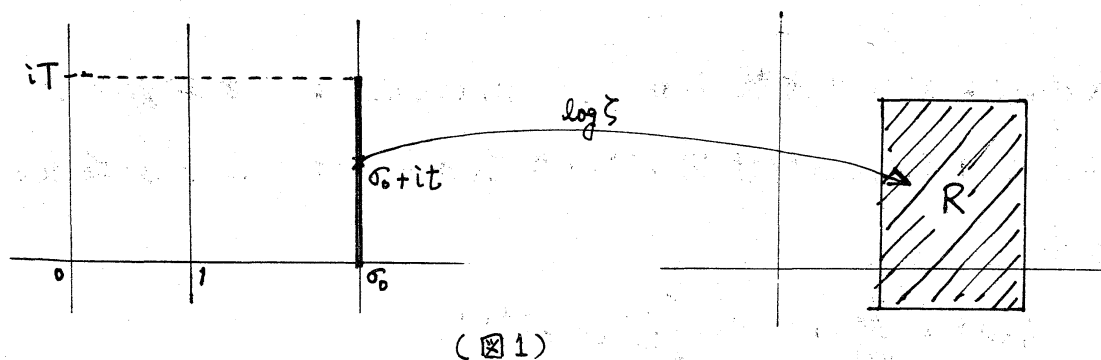
$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \prod_{p=1}^{\infty} (1 - p_n^{-s})^{-1},$$

ただしここで  $p_n$  は  $n$  番目の素数を表わすものとする。この表示から,  $\sigma > 1$  において  $\zeta(s) \neq 0$  となることは明らかである。これに対して, より重大な領域  $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1$  においては,  $\zeta(s)$  の零点分布の問題が極めて困難な様相を呈することは周知の事実である。

さて零点ではなく,  $\zeta(s)$  の非零値の分布状態を考へようとする,  $\sigma > 1$  においてすら non-trivial な問題となる。 $\zeta(s)$  の非零値というかわりに,  $\log \zeta(s)$  の有限値とい, てもいい。この問題について, H. Bohr は 20 年にわたる努力の末, 1930 年代初頭, B. Jessen との共著で次の成果を発表した。

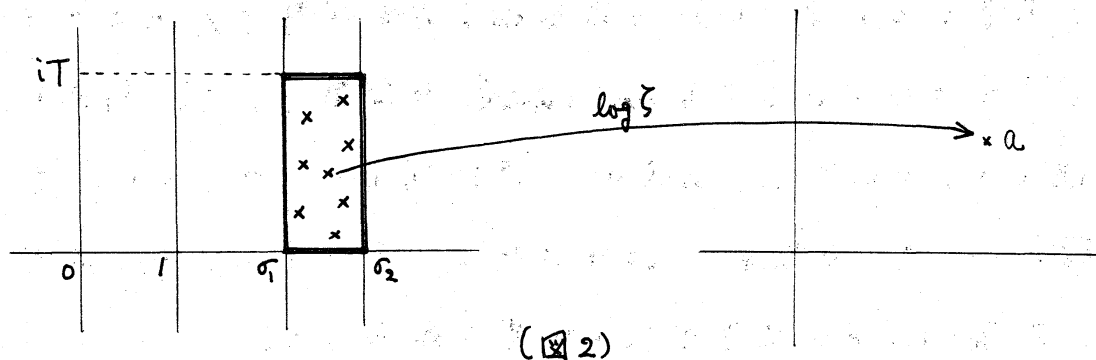
(I)  $\sigma > 1$  における値分布  $\{[1]\}$ .  $\sigma_0 > 1$  と, 辺が座標軸に平行な  $\mathbb{C}$  内の長方形  $R$  を勝手に固定し, 集合  $\{t \in [0, T] \mid \log \zeta(\sigma_0 + it) \in R\}$  の (Jordan) 測度を  $L(T, R)$  と書くと, 次の極限値が存在する:

$$W(R) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{L(T, R)}{T} \quad (1)$$



次に,  $1 < \sigma_1 < \sigma_2$  とし, また  $a \in \mathbb{C}$  を勝手に固定し, 領域  $\{\sigma_1 < \sigma < \sigma_2, 0 < t < T\}$  における  $\log \zeta(s)$  の  $a$ -点の (重複度もこめた) 個数を  $N_a(T)$  と書くと, 次の極限値が存在する:

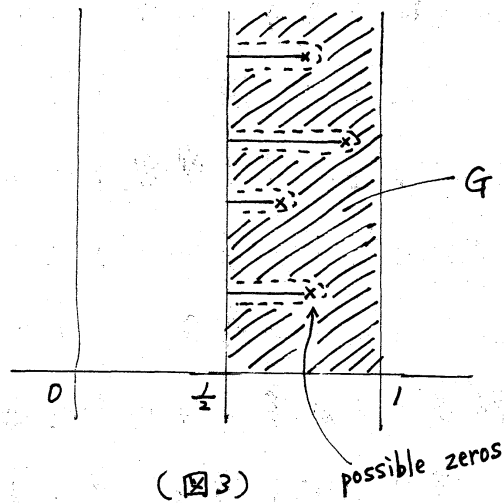
$$G(a) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{N_a(T)}{T} \quad (2)$$



(II)  $\frac{1}{2} < \sigma \leq 1$  における値分布 ([2]).

この場合,  $\frac{1}{2} < \sigma < 1$  の範囲に  $\zeta(s)$  の零点が存在する可能性がある。

Riemann 予想が証明されない限りはこの可能性を排除できないので,  $\log \zeta(s)$  の意味をはっきりさせるため,  $\frac{1}{2} < \sigma < 1$  の範囲にもし零点  $s_0$  があれば, その左側は取り除いて



し、て, のこりの領域を  $G$  とする。(図3). 議論をこの  $G$  に限ることにより, (1), (2) に対応する結果がこの範囲でもそのまま成り立つことが証明される。

以上の Bohr-Jessen の結果は,  $\zeta(s)$  にと, て零点がいかに関例外的であるかを明らかにした, 著しいものである。

Bohr-Jessen 以後,  $\zeta(s)$  の非零値の値分布論はあまり活発には研究されなくなった。彼らの論文 [1][2] が芸術的な完成品であったことが, あるいはその理由のひとつかもしれない。近年にな, てようやく, 非零値の値分布に関する興味深い結果が, S. Voronin や A. Good らによ, て提出されるようになった。(Good [4] およびその References に出ている文献参照)

もちろん Riemann 以来,  $\zeta(s)$  の研究者にと, てその最大の関心事は零点分布であった。実際, 函数論によれば, 極と零点

の情報が与えられれば  $\zeta(s)$  の挙動は決定されてしまう。しかしこのことは、逆にいえば、 $\zeta(s)$  の非零値の値分布にも、そのような値分布を実現させるような零点の挙動についての情報が含まれているということである。そして、零点だけを見ていたのでは見落としてしまうような貴重な情報が、非零値の値分布の研究から将来見出されるかもしれない。

残念ながら現在、そのような可能性を示唆するデータは、筆者の知る限りにおいては、何もない。Bohr の理論からして、その意義はまだよくわかっていないといえるのである。こうした混迷の時には、しかしやはり、まず非零値の値分布論の創始者 Bohr の思想境に触れてみるのがよいだろう。Bohr-Jessen の論文 [1][2] は、まことに味わいのある、真の古典である。本稿の目的のひとつは、この論文の基本的なアイデアを紹介することである。

筆者は最近、この Bohr-Jessen の結果を精密化することを試み、先ず  $\sigma > 1$  の場合に、(1), (2) を誤差項つき、漸近式に精密化した。たとえば (1) に対応して、次の結果を得た：

$$L(T, R) = W(R)T + O\left(\frac{T}{(\log \log T)^{\frac{\sigma-1}{\eta}-\varepsilon}}\right), \quad (3)$$

ここで  $O$ -定数は  $\sigma$  と  $\varepsilon$  のみに依存する。

これらの結果は、(1) の精密化は 1984 年 1 月の、岡山・林原

研究所におけるシンポジウム "Number Theory and Analysis" において、また (2) の精密化は 1985 年 6 月の京大数理論での研究集会において<sup>(\*)</sup>公表されたわけであるが、その証明の最も重大な部分は前者においてあるわれる。そこで本稿では、もっぱら (3) の証明の方針を述べようと思う。詳細はいずれ [5][6][7] に公表される予定なので、証明の構造をスケッチするにとどめる。

$\frac{1}{2} < \sigma \leq 1$  の場合。精密化は、現在実行中であるが、この場合に (1) に対応する Bohr-Jessen の結果を精密化するには、「Bohr-Landau の平均値定理」の精密化が必要である。それには、この定理そのものよりも、これを一般化した「Carlson の定理」に注目し、その証明を精密化すればうまくいく。するとあとは、(3) に対応する結果を  $\frac{1}{2} < \sigma \leq 1$  で出すのに、もはや困難はない。

以下、(1) と (3) の証明の方針のスケッチに入るが、その前に、この研究の過程でお世話にな、た多くの方々に、この機会に謝意を表しておきたい。筆者、指導教官、藤井昭雄先生

---

(\*) 講演の時には、証明の一部で Nevanlinna の近接函数を用いる複雑な議論がありましたが、後日、そのようなものを使わない、もっと簡単な方法に気づいたことを記しておきます。

は、一貫して筆者の研究を激励され、また Jensen の定理に関する貴重な示唆を与えられた。塩川幸賢・江上繁樹・村田玲音の各氏には長時間セミナーに付きあっていたり、強い関心をもつて、多くの議論と助言をしていただいた。[6]におけるパラメーターの簡明な choice は江上氏から手紙で指摘されたものである。田村純一氏はデンマーク語の文法書と辞書を快く貸してくださった。小沢満氏は、結局不要になったといえ、Nevanlinna 理論のひとつの version について非常に詳しい解説をしてくださった。伊藤雄二氏には [5][6] を、村田氏には [7] を精読していただいた。H. Niederreiter 教授からは関連する彼の論文の存在を教わった。幾何学については宮崎哲朗氏から学んだことが多い。[5] をめぐる彼との discussion は、時には夜を徹して、何度も何度もくりかえされた。

### Bohr - Jessen の論文の証明の構造

大論文がしばしばそうであるように、Bohr - Jessen の基本的着想も非常に単純素朴である。

出発点は  $\zeta(s)$  の Euler 積表示である。  $\sigma = \sigma_0 > 1$  の線上では、  $\log \zeta(s)$  は次のように書ける：

$$\log \zeta(s) = - \sum_{n=1}^{\infty} \log(1 - p_n^{-(\sigma+it)}) = - \sum_{n=1}^{\infty} \log(1 - p_n^{-\sigma} e^{-it \log p_n}) \quad (4)$$

この右辺の和の各項について、 $t$ を動かした時の様子は、 $1 - p_n^{-\sigma_0} e^{-it \log p_n}$  は 1 を中心とする半径  $p_n^{-\sigma_0}$  の円周上を動き、従って  $\log(1 - p_n^{-\sigma_0} e^{-it \log p_n})$  は、その円周の  $\log$  による像、ひとつの凸の開曲線を描く(図4)。

よって(4)の右辺をしらべるには、こうした凸開曲線、“和”に関する理論を展開すればよい。まず(4)の和を有限個で切って、

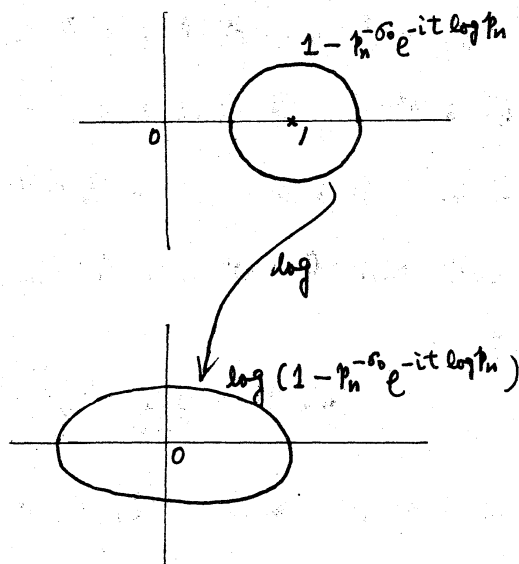
$$f_N(t) = - \sum_{n=1}^N \log(1 - p_n^{-\sigma_0} e^{-it \log p_n})$$

とおく。そしてこれに付随して、 $N$ 個の変数  $\theta_1, \dots, \theta_N \in [0, 1)$  に対して、

$$S_N(\theta_1, \dots, \theta_N) = - \sum_{n=1}^N \log(1 - p_n^{-\sigma_0} e^{2\pi i \theta_n})$$

とする。 $S_N$  は  $N$ 次元トーラス  $T^N$  から  $\mathbb{C}^\times$  への写像と見るべきである。

集合  $X$  の測度を一般に  $m(X)$  と書くと、我々が扱おうとしているのは  $L(T, R) = m\{t \in [0, T] \mid \log \zeta(\sigma_0 + it) \in R\}$  であるが、まず最初に、有限で切った  $f_N(t)$  に対する類似物  $L_N(T, R) = m\{t \in [0, T] \mid f_N(t) \in R\}$  を考える。 $f_N(t) \in R$  という条件を、 $S_N$  の言葉で書いてみよう。 $T^N$  の部分集合  $\Omega_N(R)$  を、 $\Omega_N(R) =$



(図4)



$\{(\theta_1, \dots, \theta_N) \in T^N \mid S_N(\theta_1, \dots, \theta_N) \in R\}$  と定めれば, 明らかに

$$f_N(t) \in R \iff \left(-\frac{t}{2\pi} \log p_1, \dots, -\frac{t}{2\pi} \log p_N\right) \in \Omega_N(R) \pmod{1}$$

である。(ただし右辺の  $\pmod{1}$  の意味は, 各  $n$  ( $1 \leq n \leq N$ ) に対し,  $-\frac{t}{2\pi} \log p_n$  の小数部分を考えよ, ということである。) さて素因数分解の一意性により,  $-\frac{1}{2\pi} \log p_1, \dots, -\frac{1}{2\pi} \log p_N$  は  $\mathbb{Q}$  上線型独立であるから, 一様分布論におけるよく知られた Kronecker-Weyl の定理 (例えば Titchmarsh [8], §11.7 参照) により, 極限值

$$W_N(R) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{L_N(T, R)}{T} \quad (5)$$

が存在し, それは  $\Omega_N(R)$  の  $N$  次元体積  $m(\Omega_N(R))$  に等しい。

さて  $f_N(t)$  は  $N \rightarrow \infty$  のとき  $\log \zeta(\sigma_0 + it)$  を近似するから, 勝手な  $\delta > 0$  に対して,  $N$  を十分大きくとれば,

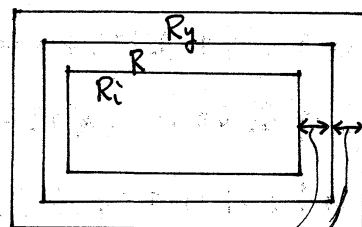
$$|\log \zeta(\sigma_0 + it) - f_N(t)| < \delta \quad (6)$$

が  $t$  について一様に成り立つようにできる。実際,

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |\log(1 - p_n^{-\sigma_0} e^{-it \log p_n})| \ll \sum_{n=N+1}^{\infty} p_n^{-\sigma_0}$$

だから, これは明らかである。( $\sigma_0 > 1$  に注意) そこで最初,

長方形  $R$  に対して, 図5のように  $\delta$  だけ各辺をふくらませた長方形  $R_\gamma$ ,  $\delta$  だけ縮めた長方形  $R_i$  を考える。すると (6) から,  $\log \zeta(\sigma_0 + it) \in R$  なら  $f_N(t) \in R_\gamma$  であ



(図5)

り、逆に  $f_N(t) \in R_i$  であれば  $\log \zeta(\sigma_0 + it) \in R$  である。このことは次の不等式を導く：

$$L_N(T, R_i) \leq L(T, R) \leq L_N(T, R_y). \quad (7)$$

ここで全体を  $T$  でわって  $T \rightarrow \infty$  とすると、(5) より、

$$W_N(R_i) \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{L(T, R)}{T} \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{L(T, R)}{T} \leq W_N(R_y) \quad (8)$$

を得る。

そこで次に  $W_N$  を考慮する必要があるが、この部分こそ凸閉曲線の和に関する Bohr-Jessen の精巧な理論であって、長大な論文 [3] に於てその全貌が明らかになつたものである。結論からいへば、(5) および (1) で定まる  $W_N$ ,  $W$  はそれぞれ  $\sigma = \sigma_0$  上において、 $f_N(t)$ ,  $\log \zeta(\sigma_0 + it)$  の値が  $R$  に入る“確率”と見なせるが、Bohr-Jessen は [3] でその“密度函数”の存在を、具体的に構成して示したのである。即ちまず、十分大きい  $N$  に対し  $\mathbb{C}$  上の連続函数  $F_N(z)$  が存在し、(5) の  $W_N(R)$  について

$$W_N(R) = \iint_R F_N(z) dx dy \quad (9)$$

と書けることを、 $F_N(z)$  を実際に構成して示した。さらに、 $N \rightarrow \infty$  のとき  $F_N(z)$  はある連続函数  $F(z)$  に一様収束する二つがわかる。そこで、長方形  $R$  に対して

$$W(R) = \iint_R F(z) dx dy$$

と定義すれば,  $N \rightarrow \infty$  のとき  $W_N(R) \rightarrow W(R)$  である. 我々は  
この  $W(R)$  が求まるものであることを証明する.

勝手に  $\varepsilon > 0$  を固定する.  $\delta$  を十分小さくとれば,  $F(z)$  の連  
続性と  $W(R)$  の定義から,

$$W(R) - \varepsilon < W(R_i) \leq W(R) \leq W(R_y) < W(R) + \varepsilon \quad (10)$$

とできる. この  $\delta$  に対して (6) をみたし, かつ  $F_N(z)$  が存在す  
るようになんて大きく  $N$  をとる. するとまず (8) の成立が保証  
される. さらに, 必要なら  $N$  を大きくとりかえて,

$$|W(R_i) - W_N(R_i)| < \varepsilon, \quad |W(R_y) - W_N(R_y)| < \varepsilon \quad (11)$$

としてよい. (11) と (8) から,

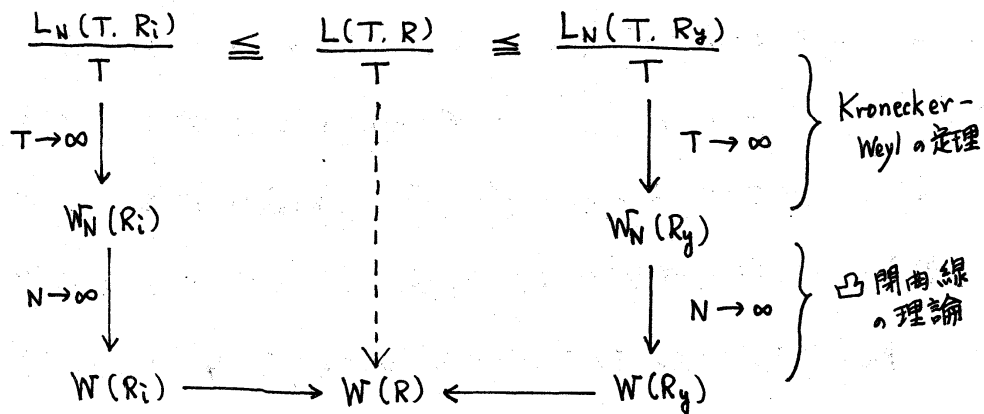
$$W(R_i) - \varepsilon < \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{L(T, R)}{T} \leq \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{L(T, R)}{T} < W(R_y) + \varepsilon.$$

これと (10) から,

$$W(R) - 2\varepsilon < \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{L(T, R)}{T} \leq \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{L(T, R)}{T} < W(R) + 2\varepsilon.$$

$\varepsilon$  は任意だから, これは (1) を意味している. 以上の証明の  
構造を図式化したものが次ページの図である.

後は  $F_N(z)$  の構成が残っているが, それより先に, より重要  
な領域である  $\frac{1}{2} < \sigma \leq 1$  においては (1) に対応する結果はど  
のようにして証明されるか見ておこう. 実は基本的な方針は  
全く変わらないのであるが, 今度は  $f_N(t) \rightarrow \log \zeta(\sigma + it)$  ( $N \rightarrow \infty$ )



< (1) の証明の構造図 >

という単純な状況にけな、ていないうで、そこに工夫がいる。  
それが結局は平均値定理に帰着されるのである。

今の場合、序論で述べた  $G$  に制限して考えることで、 $\log \zeta$   
の意味を一個正則に定めることができる。そして、

$$L(T, R) = m\{t \in [0, T] \mid \sigma_0 + it \in G, \log \zeta(\sigma_0 + it) \in R\}$$

と定義し、この  $L(T, R)$  に対して (1) を示す。

まず、 $f_N(t)$  は有限和だから  $\frac{1}{2} < \sigma_0 \leq 1$  でも正則で、(5) はその  
まま成り立つことに注意する。問題は (6) に相当する部分で  
あるが、これについては、 $\varepsilon > 0$ ,  $\delta > 0$  を勝手に与える時、

$$l_N(T) = m\{t \in [0, T] \mid \sigma_0 + it \in G, |\log \zeta(\sigma_0 + it) - f_N(\sigma_0 + it)| \geq \delta\}$$

が、十分大きい  $N$  に対して

$$\overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{l_N(T)}{T} < \varepsilon \quad (12)$$

となることを証明する。つまり (6) が成り立たないような  $\epsilon$  は, "あまり多くはない" ことがいえるのである。(6) が成り立つ  $\epsilon$  については  $\epsilon_0 > 1$  の時と同じ議論ができるから, 結局この場合にも (1) が示せる。即ち (7) の代わりに今度は

$$L_N(T, R_i) - L_N(T) \leq L(T, R) \leq L_N(T, R_y) + L_N(T)$$

となるが,  $L_N(T)$  は小さいのでこの部分は結局無視できて, 他の部分は全く同様, というわけである。(正確には,  $F_N(z) \rightarrow F(z)$  の部分の議論に少しデリケートな箇所がある.)

(12) の証明を簡単にスケッチしよう。いま  $\zeta(s) \prod_{n=1}^N (1 - p_n^{-s})$  を  $\zeta_N(s)$  と書くと,

$$\log \zeta(s) - f_N(s) = \log \zeta_N(s) = \log \{1 + (\zeta_N(s) - 1)\}$$

より,  $|\log \zeta(s) - f_N(s)| \ll |\zeta_N(s) - 1|$  である。

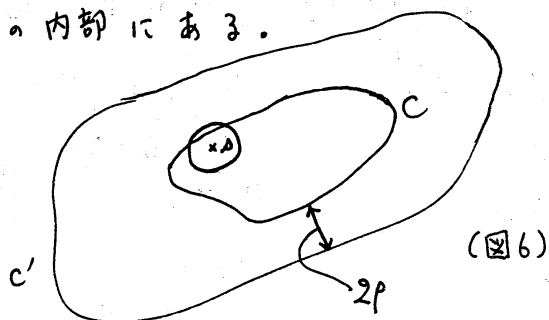
ところで一般に,  $C$  と  $C'$  は  $\mathbb{C}$  内の 2 つの閉曲線で,  $C$  は全く  $C'$  の中に入, てゐるとして,  $f(s)$  は  $C'$  の内部で正則な函数とし,

$$\iint_{C' \text{ 内部}} |f(s)|^2 d\sigma dt < \delta$$

とする。  $\text{dist}(C, C') = 2p$  と書くと,  $C$  の内部, 点  $a$  に対して, 円板  $\{a' \mid |a' - a| \leq p\}$  は  $C'$  の内部にある。

よって,

$$|f(a)|^2 \leq \frac{1}{\pi p^2} \iint_{|a' - a| \leq p} |f(a')|^2 d\sigma dt$$



(図6)

$$\leq \frac{1}{\pi p^2} \iint_{C' \text{ 内部}} |f(\lambda')|^2 d\sigma dt < \frac{\delta}{\pi p^2}.$$

即ち  $\delta$  が小さければ  $|f(\lambda)|$  も小さい。

この定理を使うと,  $|\zeta_N(\lambda) - 1|$  を直接評価する代わりに, 適当な閉曲線  $C'$  の内部での積分

$$\iint |\zeta_N(\lambda) - 1|^2 d\sigma dt \quad (13)$$

の評価をすればいいことになる。そして実際,  $f(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-\lambda}$  なる Dirichlet 級数で定義された  $f(\lambda)$  について, 適当な条件の下で

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |f(\sigma + it)|^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 n^{-2\sigma}$$

を主張する F. Carlson の古典的定理がある。(Titchmarsh [9], §9.51) あるいは Bohr-Jessen に従って, 少し弱い形の Bohr-Landau の定理を用いてもいいが, いずれにしても (13) の上から, 評価がえられる。そして,  $L_N(T)$  があまり大きいと, その評価に矛盾するのである。

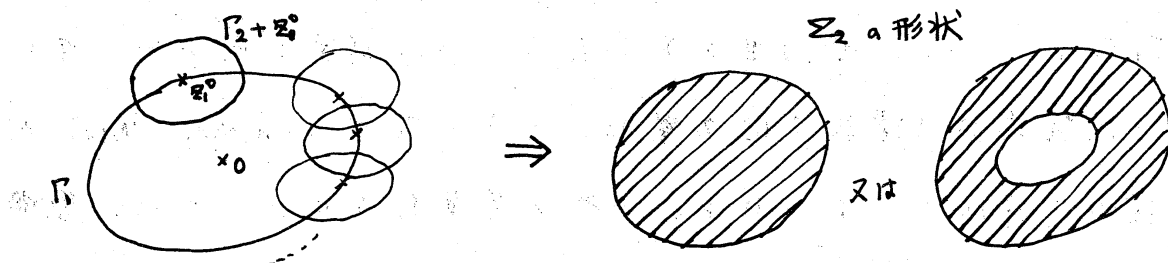
Bohr-Jessen の理論における一方の主要定理である (2) の証明には, ここでは立ち入らない。(1)の結果を用いて, さらに函数論的な議論を積み重ね, もういちど Kronecker-Weyl の定理を適用して示される。細部の見事なテクニックは, 原典から直接味わうべきものである。

### Bohr - Jessen の凸閉曲線の理論

(1) の証明の中で、密度函数  $F_N(z)$ ,  $F(z)$  の存在を示す部分が残っている。既に述べたようにこの証明は [3] に詳述されているのだが、この論文はデンマーク語で書かれ、しかも 80 ページをこす長編である。そのため、本来はかなり詳しい紹介が望まれるが、ここでは紙数もない。だが、少くとも理論の骨格だけでも解説をしておくのがよいだろう。

$$\Gamma_n = \{z_n = z_n(\theta_n) = -\log(1 - p_n^{-s_0} e^{2\pi i \theta_n}) \mid 0 \leq \theta_n < 1\} \text{ とおく.}$$

(図4)に示したように、 $\Gamma_n$  は  $\mathbb{C}$  内の凸閉曲線である。 $\Sigma_N = \{z_1 + z_2 + \dots + z_N \mid z_j \in \Gamma_j (1 \leq j \leq N)\}$  とおくと、これは  $S_N(T^N)$  に一致する。 $\Sigma_N$  はどのような図形になっているか考えてみよう。 $\Sigma_2 = \{z_1 + z_2 \mid z_1 \in \Gamma_1, z_2 \in \Gamma_2\}$  において、 $z_1^0 \in \Gamma_1$  を固定すると、 $\{z_1^0 + z_2 \mid z_2 \in \Gamma_2\}$  は、要するに  $\Gamma_2$  を  $z_1^0$  だけ平行移動したものである。このようなものが各  $z_1^0$  のまわりにできて、 $\Sigma_2$  は  $z_1^0$  を  $\Gamma_1$  全体に動かした時のそのようなものの合併集合であるから、次図のようになる：



(図7)

ここで、 $\Sigma_2$  が卵形状になるかドーナツ状になるかは、 $\sigma_0$  の値のみで決まることに注意しておく。以下同様に考えれば、結局すべての  $\Sigma_N$  ( $N \geq 2$ ) は卵形状またはドーナツ状になることがわかる。

以下では簡単のため、 $\sigma_0$  が十分大きくて、 $\Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$  がドーナツ状になっている場合のみを考える。一般の場合も和の順序を少し入れかえるだけで殆んど同様の議論が成立するが、ここでは省略する。

さて我々の目標は、十分大きい各  $N$  に対して、(9) が成り立つような  $\mathbb{C}$  上の連続関数  $F_N(z)$  を構成することである。ところが、ある  $N=N_0$  についてこのような関数ができれば、 $N_0$  以上のすべての  $N$  について、 $F_N$  の構成は容易である。それは、 $F_{N-1}$  が (9) を満たすようにできているとすれば、

$$F_N(z) = \int_0^1 F_{N-1}(z - z_N(\theta_N)) d\theta_N \quad (z_N(\theta_N) \in \Gamma_N) \quad (14)$$

とすればよい。実際このように定義すれば、

$$\begin{aligned} \iint_R F_N(z) dx dy &= \iint_R dx dy \int_0^1 F_{N-1}(z - z_N(\theta_N)) d\theta_N \\ &= \int_0^1 d\theta_N \iint_R F_{N-1}(z - z_N(\theta_N)) dx dy = \int_0^1 d\theta_N \iint_{R - z_N(\theta_N)} F_{N-1}(z) dx dy \\ &= \int_0^1 W_{N-1}(R - z_N(\theta_N)) d\theta_N \end{aligned} \quad (15)$$



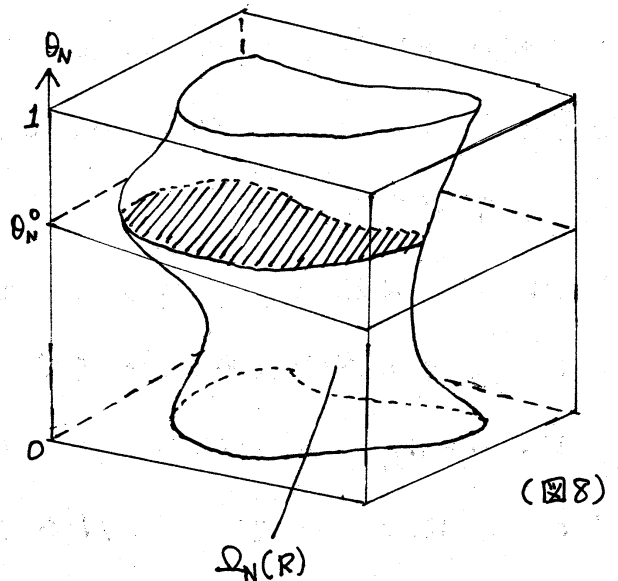
である。ところで一方  $W_N(R) = m(\Omega_N(R))$ ,  $W_{N-1}(R - \Xi_N(\theta_N)) = m(\Omega_{N-1}(R - \Xi_N(\theta_N)))$  であつた。いま,  $N$ 次元トーラス  $T^N$  において  $\theta_N^0$  をひとつ固定すると,  $(\theta_1, \dots, \theta_{N-1}, \theta_N^0) \in \Omega_N(R)$ , 即ち  $S_N(\theta_1, \dots, \theta_{N-1}, \theta_N^0) \in R$  となるには,  $S_{N-1}(\theta_1, \dots, \theta_{N-1}) + \Xi_N(\theta_N^0) \in R$ , 即ち  $S_{N-1}(\theta_1, \dots, \theta_{N-1}) \in R - \Xi_N(\theta_N^0)$  でなければならぬ。これは,  $\Omega_N(R)$  を  $\theta_N = \theta_N^0$  なる(超)平面で切つたときの断面積が,  $m(\Omega_{N-1}(R - \Xi_N(\theta_N^0)))$  となる, ということである。従つて,  $W_N(R) = m(\Omega_N(R))$  は,

$$W_N(R) = \int_0^1 W_{N-1}(R - \Xi_N(\theta_N)) d\theta_N$$

で与えられる。(15)とこの

式から,  $F_N$ (田)も(9)を満たすことがわかる。

こうして, 何かひとつの  $N_0$  について(9)を満たす連続函数  $F_{N_0}$  を作ればいいことになつたが, 我々の扱つてゐる簡単な場合には, 実は  $N_0=4$  ととれるのである。即ちまず, とにかく(9)が成り立つような"函数"  $F_2$  を作る。これは全く連続でないが, 積分(14)で  $F_3, F_4$  と作つていくことにより,  $F_4$  までいくと連続性を獲得する, というのが基本的発想である。そこで  $F_2$  の構成法を述べよう。



$z \in \Sigma_2^\circ$  ( $\Sigma_2$ の内点集合)とする。

すると  $z$  は  $\Gamma_1$  の点と  $\Gamma_2$  の点との和であるが、図9からわかるように、2組の  $(z_1', z_2')$ ,  $(z_1'', z_2'') \in \Gamma_1 \times \Gamma_2$  があって、

$$z = z_1' + z_2' = z_1'' + z_2''$$

となる。すると  $z_1'$ ,  $z_1''$  は集合

$\Gamma_1 \cap (z - \Gamma_2)$  に属するが、 $z_1'$  における  $\Gamma_1$  と  $z - \Gamma_2$  との“交角” (即ち  $z_1'$  における  $\Gamma_1$  の接線と  $z - \Gamma_2$  の接線とをなす角) を  $\theta'$  とする。 ( $0 \leq \theta' \leq \frac{1}{2}\pi$ ) 同様に  $z_1''$  における  $\Gamma_1$  と  $z - \Gamma_2$  との交角を  $\theta''$  とする。このとき  $F_2(z)$  を、

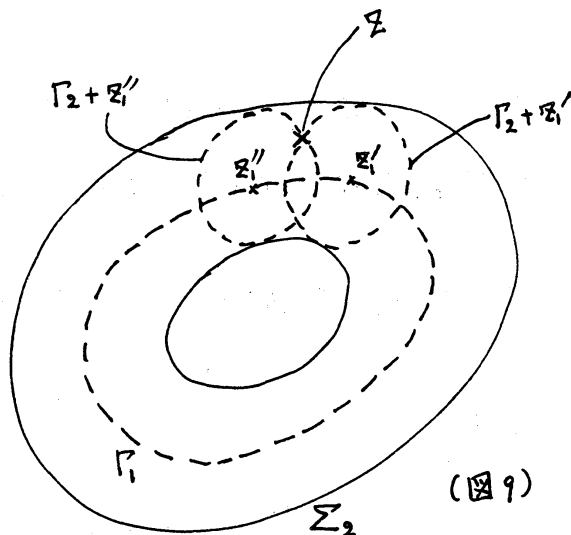
$$F_2(z) = \frac{f_1(z_1') f_2(z_2')}{\sin \theta'} + \frac{f_1(z_1'') f_2(z_2'')}{\sin \theta''}$$

と定義する。ただし  $f_n(z_n)$  は、 $\theta_n \in \Gamma_n$  上定義された  $z_n$  の函数  $\theta_n(z_n)$  とみたとき、 $f_n(z_n) = \left| \frac{d}{dz_n} \theta_n(z_n) \right|$  として与えられるものである。そしてさらに、

$$F_2(z) = \begin{cases} \infty & z \in \partial \Sigma_2 \quad (\Sigma_2 \text{の境界}) \\ 0 & z \in \Sigma_2^c \quad (\Sigma_2 \text{の補集合}) \end{cases}$$

とおく。こうしてできた  $F_2(z)$  が、(9)を満たすのである。

その証明は、実際には(9)の右辺の積分の意味からはっきりさせる必要があるのだが、ここでは本質的な筋道だけ述べよ



う。  $R$  を細かく分割することにより,  $\Sigma_2^0$  に含まれる小さな長方形  $R_0$  に対して (9) を示せば十分である。  $z \in R_0$  においては,

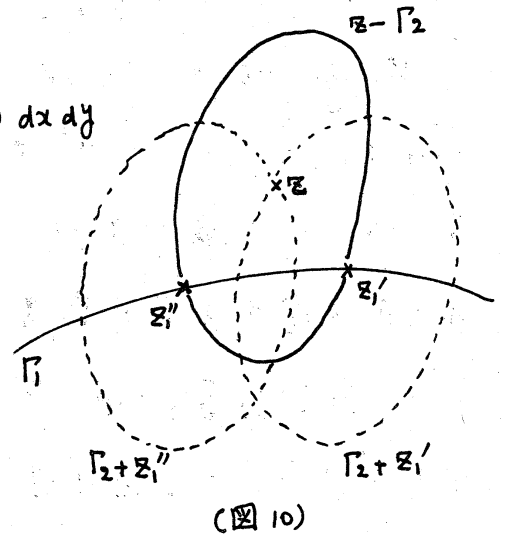
$$F_2(z) = F_2'(z) + F_2''(z), \quad F_2'(z) = \frac{f_1(z_1') f_2(z_2')}{\sin \theta'}, \quad F_2''(z) = \frac{f_1(z_1'') f_2(z_2'')}{\sin \theta''}$$

であるから,

$$W_2(R_0) = \iint_{R_0} F_2'(z) dx dy + \iint_{R_0} F_2''(z) dx dy$$

をいえよ。

まず,  $\Gamma$  を正方向にまわるとき,  
 $\Sigma - \Gamma_2$  を最初に切る点を  $z_1'$ , 後に  
 切る点を  $z_1''$  とすることによって  $z_1'$ ,  $z_1''$  を  
 確定しておく。(図10). そして  $z_1' = z_1(\theta_1')$ ,



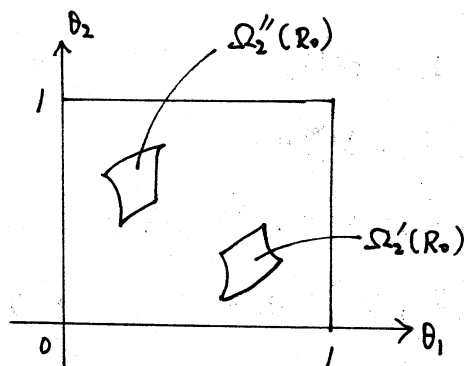
$z_1'' = z_1(\theta_1'')$ ,  $z_2' = z_2(\theta_2')$ ,  $z_2'' = z_2(\theta_2'')$  とする。  $T^2$  の部分集合  $\Omega_2'(R_0)$  と  $\Omega_2''(R_0)$  を,  $\Omega_2'(R_0) = \{(\theta_1', \theta_2') \mid z \in R_0\}$ ,  $\Omega_2''(R_0) = \{(\theta_1'', \theta_2'') \mid z \in R_0\}$  とすれば,  $\Omega_2(R_0) = \Omega_2'(R_0) \cup \Omega_2''(R_0)$  で, しかも  $\Omega_2'(R_0)$  と  $\Omega_2''(R_0)$

は正の距離はなれている。我々は

$$m(\Omega_2'(R_0)) = \iint_{R_0} F_2'(z) dx dy,$$

$$m(\Omega_2''(R_0)) = \iint_{R_0} F_2''(z) dx dy$$

を示す。



(図11)

前者のみ示そう。 $R_0$  と  $\Omega'_2(R_0)$  は 1:1 に対応しているので、 $dx dy$  を変数変換して  $d\theta'_1 d\theta'_2$  に直したい。この時の Jacobian を計算する。まず  $f_n$  の定義により、 $d\theta'_1 = f_1(z'_1) dz'_1$ 、 $d\theta'_2 = f_2(z'_2) dz'_2$  である。 $z'_1 \in \Gamma_1$ 、 $z'_2 \in \Gamma_2$  であるが、 $z$  における  $\Gamma_1 + \Gamma'_2$  と  $\Gamma_2 + \Gamma'_1$  との交角は  $\theta'$  だから、 $dx dy = dz'_1 dz'_2 \sin \theta'$ 。よって、

$$\iint_{R_0} F'_2(z) dx dy = \iint_{\Omega'_2(R_0)} F'_2(z) \frac{\sin \theta'}{f_1(z'_1) f_2(z'_2)} d\theta'_1 d\theta'_2 = \iint_{\Omega'_2(R_0)} d\theta'_1 d\theta'_2 = m(\Omega'_2(R_0)).$$

これで  $F_2(z)$  が (9) を満たすことが示された。

そこであとは、前にも述べたように、 $F_2(z)$  を (14) によって 2 回 "積分" して  $F_4(z)$  を作る。ただし実際には、 $F_2$  のままでは扱いにくいため、小さい正数  $d$  をとり、

$$F_2^d(z) = \begin{cases} F_2(z) & z \in \Sigma_2^0 \text{ かつ } \text{dist}(z, \partial \Sigma_2) > d \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

という、 $F_2$  を "有限に切り落した" 函数  $F_2^d$  を導入し、この  $F_2^d$  を (14) のようにして 2 回積分して  $F_3^d$ 、 $F_4^d$  を作る。そして  $d \rightarrow 0$  のとき、この  $F_4^d(z)$  が  $F_4(z)$  に一様収束し、かつ  $F_4(z)$  が (9) を満たしていることを証明するのである。そのためにはさまざまな補助的評価が必要であり、その詳細は極めて繁雑で、簡潔な紹介はとてもできない。紙数の関係もあってここではその紹介は割愛するが、全体としては実に見事な理論であるので、適当な機会に改めて解説できればと思う。この理論の文献が

デンマーク語のものしかないのは、まことに残念である。

なお  $N \rightarrow \infty$  のとき  $F_N(z)$  が  $F(z)$  に一様収束することの証明もここでは省略するが、ここではじめて、 $\sigma_0 > 1$  の場合と  $1 \geq \sigma_0 > \frac{1}{2}$  の場合とで議論が別れることをコメントしておく。即ち  $\sigma_0 > 1$  のときには、そもそも図形  $\Sigma_N$  が、 $N \rightarrow \infty$  の時も有界にとどまるので、 $F_N(z) \rightarrow F(z)$  の証明は非常に簡単である。しかし  $\frac{1}{2} < \sigma_0 \leq 1$  のときには、 $\Sigma_N$  自体のいわば“発散”するので、議論は少し微妙になる。そして、 $\sum_n p_n^{-2\sigma_0}$  が収束すること、即ち  $\sigma_0 > \frac{1}{2}$  であることが本質的に使われる。

以上で論文[3]の紹介を終えるが、この理論の一部は、すでに1913年、やはりデンマーク語ではあるが、Bohrが発表している。また H. Bohr - R. Courant, *Neue Anwendungen der Theorie der Diophantischen Approximationen auf die Riemann'sche Zetafunktion*, J. reine angew. Math. 144 (1914) 249-274. にもその一端があらわれる。[3]は、相当な年月をかけて練りあげられた、名匠の大作なのである。

今までの紹介からも理解されると思うが、この理論[1]-[3]は、単に Riemann の  $\zeta(s)$  のみならず、一般に Euler 積をもつ Dirichlet 級数に適用しうるものである。従って Bohr-Jessen の理論は、ゼータ函数、L-函数についての基本的な一般理論のひとつといえることができる。

## 精密化のプログラム

以下、筆者の結果(3)の証明の構造を略述する。

(1)の証明について前出の〈構造図〉を想起していただきたい。そこでは、 $T \rightarrow \infty$  と  $N \rightarrow \infty$  と2つの極限をとっているが、前者は Kronecker-Weyl の定理で、後者は Bohr-Jessen 自身による凸閉曲線の理論で、極限の存在が保証されている。

筆者の最初の発想は、Kronecker-Weyl の定理が使われているならば、その部分に、一様分布についての最近の定量的理論、いわゆる discrepancy の理論を用いることで、結果を精密化できるだろうという、全く単純なものであった。

それを実行しようとする、問題点は2つある。まず第1に、Bohr-Jessen が用いたのは  $T^N$  における  $N$  次元の Kronecker-Weyl の定理だから、我々はそれに対応して  $N$  次元における discrepancy (定義は後で述べる) の評価を用いなければならないが、一般に discrepancy の理論は、高次元においては未発達なのである。我々が用いたのは、J.F. Koksma (1950) と P. Szüsz (1952) によって証明された、"Erdős-Turán の不等式の高次元版" というものであったが、それを適用できる形に話をまとめていくところに、大きな gap が存在するのである。適用した後の式の評価も non-trivial な問題である。

もうひとつの問題点は、(1)の<構造図>における後半部分、即ち Bohr-Jessen の凸閉曲線の理論を用いた部分をも、同時に精密化する必要がある、ということである。そのためには、[3] を紹介した際に本稿では省略した部分、即ち  $F_2$  に関する評価や、 $F_2$  から  $F_4$  を構成する時のさまざまな議論を、詳細に分析し、さらに  $\Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$  についての、より精密ないくつかのレマを証明しなければならない。この部分は実際に、[6] の主要部分の一角を成しているのだが、その土台となる Bohr-Jessen の議論を省略したことでもあり、本稿ではこの部分についてはすべて割愛せねばならない。結果だけ記すと、①で一樣に、

$$F_N(z) - F(z) = O\left(N^{\frac{1-\sigma_0}{7}} (\log N)^{1-\frac{\sigma_0}{7}}\right)$$

が成り立つ。ただし  $O$ -定数は(以下すべて)  $\sigma_0$  のみに依存する。従って、(9)とあわせて、

$$W_N(R) - W(R) = O\left(m(R) N^{\frac{1-\sigma_0}{7}} (\log N)^{1-\frac{\sigma_0}{7}}\right) \quad (16)$$

を得る。

一方 discrepancy の議論から、(5)の精密化として、勝手な正数  $m$  と  $\gamma$  に対して、

$$\begin{aligned} \frac{L_N(T, R)}{T} - W_N(R) = & O\left(\gamma^{-\frac{N}{N+1}} N^{\frac{3}{2}+2\sigma_0} + T^{-1} \right. \\ & \left. + N^2(3\gamma)^N \left[ \frac{1}{m} + \frac{1}{T} (3+2\log m)^N \exp\{C(mN\log N)^3 (\log mN)^2\} \right] \right) \quad (17) \end{aligned}$$

という、いささか複雑な式をうる。O-定数が  $R$  によるものことから、 $T^{-1}L_N(T, R_i) - W_N(R_i)$ ,  $T^{-1}L_N(T, R_y) - W_N(R_y)$  が (17) の右辺で評価される。他方、比較的容易に、

$$W_N(R_i) - W_N(R) = O(N^{\frac{1}{2}(1-\sigma_0)} (\log N)^{-\frac{1}{2}\sigma_0}),$$

$$W_N(R_y) - W_N(R) = O(N^{\frac{1}{2}(1-\sigma_0)} (\log N)^{-\frac{1}{2}\sigma_0})$$

が示せるから、

$$T^{-1}L_N(T, R_i) - W_N(R) = O\left(N^{\frac{1}{2}(1-\sigma_0)} (\log N)^{-\frac{1}{2}\sigma_0} + ((17) \text{ の右辺})\right),$$

$$T^{-1}L_N(T, R_y) - W_N(R) = O\left(N^{\frac{1}{2}(1-\sigma_0)} (\log N)^{-\frac{1}{2}\sigma_0} + ((17) \text{ の右辺})\right)$$

となり、従って (7) を用いると、 $T^{-1}L(T, R) - W_N(R)$  についても同じ評価が成り立つ。これと (16) とを合わせ、パラメーター  $m, \gamma, N$  をうまく選ぶと、結論 (3) に到達するのである。以下本稿の残りの部分では、(17) を導出するための基本的なアイデアをスケッチすることにする。

### Discrepancy の評価

我々の目標は  $T^{-1}L_N(T, R) - W_N(R) = T^{-1}L_N(T, R) - m(\Omega_N(R))$  の評価である。まず、 $C_R(x)$  を  $R$  の特性函数、即ち  $x \in R$  か  $x \notin R$  かに従って 1 または 0 となる函数とすれば、我々の評価したい式は、

$$\frac{1}{T} \int_0^T C_R(f_N(t)) dt - m(\Omega_N(R)) \quad (18)$$



と書けることに注意する。

Discrepancy を定義しよう。  $T^N = [0, 1)^N$  の部分区間とは、一般に  $[0, 1)$  の  $N$  個の部分区間  $[\alpha_1, \beta_1), \dots, [\alpha_N, \beta_N)$  の直積のことである。  $T^N$  の部分区間の全体を  $\mathcal{A}$  と書く。  $x_1, \dots, x_k$  を勝手な  $k$  個の  $T^N$  の点とする。これらの点が  $T^N$  の中で“平均的に”分布しているならば、任意の  $J \in \mathcal{A}$  に対して、  $x_1, \dots, x_k$  のうちで  $J$  に含まれる点の割合は、ほぼ  $m(J)$  になるはずである。この“期待値”からのずれは、  $x_1, \dots, x_k$  のうちで  $J$  に含まれる点の個数を  $A(J)$  とするとき、  $|k^{-1}A(J) - m(J)|$  である。そこで、  $x_1, \dots, x_k$  に関する  $N$  次元 discrepancy を、

$$D(x_1, \dots, x_k) = \sup_{J \in \mathcal{A}} \left| \frac{A(J)}{k} - m(J) \right|$$

と定義する。このとき、Koksma-Szűsz の不等式は次のように述べられる。(Kuipers-Niederreiter [10], §2.2 の Notes 参照)

勝手な  $h = (h_1, \dots, h_N) \in \mathbb{Z}^N$  に対し、

$$\|h\| = \max_{1 \leq j \leq N} |h_j|, \quad \gamma(h) = \prod_{j=1}^N \max(|h_j|, 1)$$

とおく。また  $\mathbb{R}^N$  でのふつうの内積を  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  で書けば、任意の自然数  $m$  に対し、

$$D(x_1, \dots, x_k) \leq 2N^2 3^{N+1} \left\{ \frac{1}{m} + \sum_{0 < \|h\| \leq m} \frac{\left| \sum_{n=1}^k \exp(2\pi i \langle h, x_n \rangle) \right|}{\gamma(h) \cdot k} \right\} \quad (19)$$

が成り立つ。

さて、簡単のため  $T \in \mathbb{Z}$  としよう。(このとき、(17)の右辺における項  $T^{-1}$  はあらわれない。) (18) を少し変形する

$$\begin{aligned} & \frac{1}{T} \int_0^T C_R(f_N(t)) dt - m(\Omega_N(R)) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{T-1} \int_0^1 C_R(f_N(k+t)) dt - m(\Omega_N(R)) \\ &= \int_0^1 \left[ \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{T-1} C_R(f_N(k+t)) - m(\Omega_N(R)) \right] dt. \end{aligned}$$

いま  $T^N$  の元  $x_k(t)$  を,  $x_k(t) = \left( -\frac{k+t}{2\pi} \log p_1, \dots, -\frac{k+t}{2\pi} \log p_N \right) \pmod{1}$  とおくと,  $f_N(k+t) \in R$  となるのは  $x_k(t) \in \Omega_N(R)$  のときであるから,  $\sum_{k=0}^{T-1} C_R(f_N(k+t))$  は,  $x_0(t), \dots, x_{T-1}(t)$  のうちで  $\Omega_N(R)$  に入るものの個数  $A_t(\Omega_N(R))$  を表わしている。即ち上式は,

$$= \int_0^1 \left[ \frac{1}{T} A_t(\Omega_N(R)) - m(\Omega_N(R)) \right] dt \quad (20)$$

となる。この被積分函数は Discrepancy に近い形をしているが、重大な違いは  $\Omega_N(R)$  が区間とは限らないことである。1次元トーラスの場合には部分集合は即ち部分区間であるが、高次元では両者の間には大きなへだたりがある。そこで  $T^N$  をサイの目に切って,  $\Omega_N(R)$  を区間の有限和で近似してやろう。 $T^N = [0, 1)^N$  の右辺を  $\gamma$  等分し,  $\gamma^N$  個の小立方体で  $T^N$  を分割する。

そしてそれらの小立方体のうち、 $\Omega_N(R)$  に含まれるもの全体の合併を  $R_1$ 、 $\Omega_N(R)$  との共通部分をもつもの全体の合併を  $R_2$  とすれば、明らかに  $R_1 \subset \Omega_N(R) \subset R_2$  である。 $X_0(t), \dots, X_{T-1}(t)$  のうちで  $R_1$  に入るもの、 $R_2$  に入るもの、個数をそれぞれ  $A_t(R_1)$ ,  $A_t(R_2)$  と書けば、 $A_t(R_1) \leq A_t(\Omega_N(R)) \leq A_t(R_2)$  だから、

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{T} A_t(R_1) - m(R_1) \right\} + \{ m(R_1) - m(\Omega_N(R)) \} \\ & \leq \frac{1}{T} A_t(\Omega_N(R)) - m(\Omega_N(R)) \\ & \leq \left\{ \frac{1}{T} A_t(R_2) - m(R_2) \right\} + \{ m(R_2) - m(\Omega_N(R)) \}. \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{T} A_t(\Omega_N(R)) - m(\Omega_N(R)) \right| \\ & \leq \max_{j=1,2} \left\{ \left| \frac{1}{T} A_t(R_j) - m(R_j) \right| + |m(R_j) - m(\Omega_N(R))| \right\} \end{aligned}$$

$R_j$  は高々  $\gamma^N$  個の区間、和だから、上式、第1項は discrepancy を用いて  $\gamma^N D(X_0(t), \dots, X_{T-1}(t))$  で評価できる。よって、(20) とあわせて、次の評価式がとれた：

$$\frac{1}{T} L_N(T, R) - W_N(R) \leq \gamma^N \int_0^1 D(X_0(t), \dots, X_{T-1}(t)) dt + |m(R_2) - m(R_1)|. \quad (21)$$

この積分の部分は、Koksma-Szűsz の不等式で評価するのであるが、もうひとつ、 $\Omega_N(R)$  をサイの目で近似した時の“誤差”の部分  $|m(R_2) - m(R_1)|$  が残っている。この量、評価にはかなりの幾何学的議論が必要となる。([5])

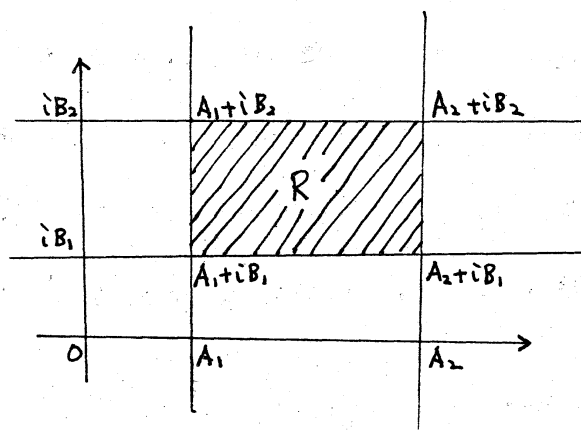
為すべきことは、 $\Omega_N(R)$  の境界  $\partial\Omega_N(R)$  に、 $\varepsilon$  の厚みをつけた領域  $(\partial\Omega_N(R))_\varepsilon = \{x \in T^N \mid \text{dist}(x, \partial\Omega_N(R)) \leq \varepsilon\}$  の体積を評価することである。そうすると、 $\varepsilon$  をサイの目、立方体、対角線の長さにとることによって、 $|m(R_2) - m(R_1)|$  の評価がえられる。

一般に  $T^N$  の部分集合  $L$  に対し、 $\{x \in T^N \mid \text{dist}(x, L) \leq \varepsilon\}$  を  $L_\varepsilon$  と記すことにする。また  $K \subset \mathbb{C}$  に対し、 $\Omega_N(K) = \{x \in T^N \mid S_N(x) \in K\}$  と書く。まず  $\partial\Omega_N(R) \subset \Omega_N(\partial R)$  に注意しよう。さらに、 $R$  の 4

つの頂点を図12のようにと

れば、 $\partial R$  は明らかに 4 直線  $\{\text{Re } z = A_1\}$ ,  $\{\text{Re } z = A_2\}$ ,  $\{\text{Im } z = B_1\}$ ,  $\{\text{Im } z = B_2\}$  の合併に含まれる

から、結局



(図12)

$$\partial\Omega_N(R) \subset \Omega_N(\{\text{Re } z = A_1\}) \cup$$

$$\Omega_N(\{\text{Re } z = A_2\}) \cup \Omega_N(\{\text{Im } z = B_1\}) \cup \Omega_N(\{\text{Im } z = B_2\})$$

となる。そこで一般に実数  $t$  に対し、 $\Omega_N(\{\text{Re } z = t\})_\varepsilon$  および  $\Omega_N(\{\text{Im } z = t\})_\varepsilon$  の体積を評価すればいいことになる。以下、前者のみ扱うことにする。

$\Omega_N(\{\text{Re } z = t\}) = \{x \in T^N \mid \text{Re } S_N(x) = t\}$  を、簡単のため  $\Omega(t)$  と書く。 $\text{Re } S_N$  の形を具体的に計算すると、

$$\Omega(t) = \{x = (\theta_1, \dots, \theta_N) \in T^N \mid -\sum_{n=1}^N \frac{1}{2} \log(1 - p_n^{-\sigma_0} \cos 2\pi \theta_n) = t\}$$

となる。即ち  $\Omega(t)$  は、

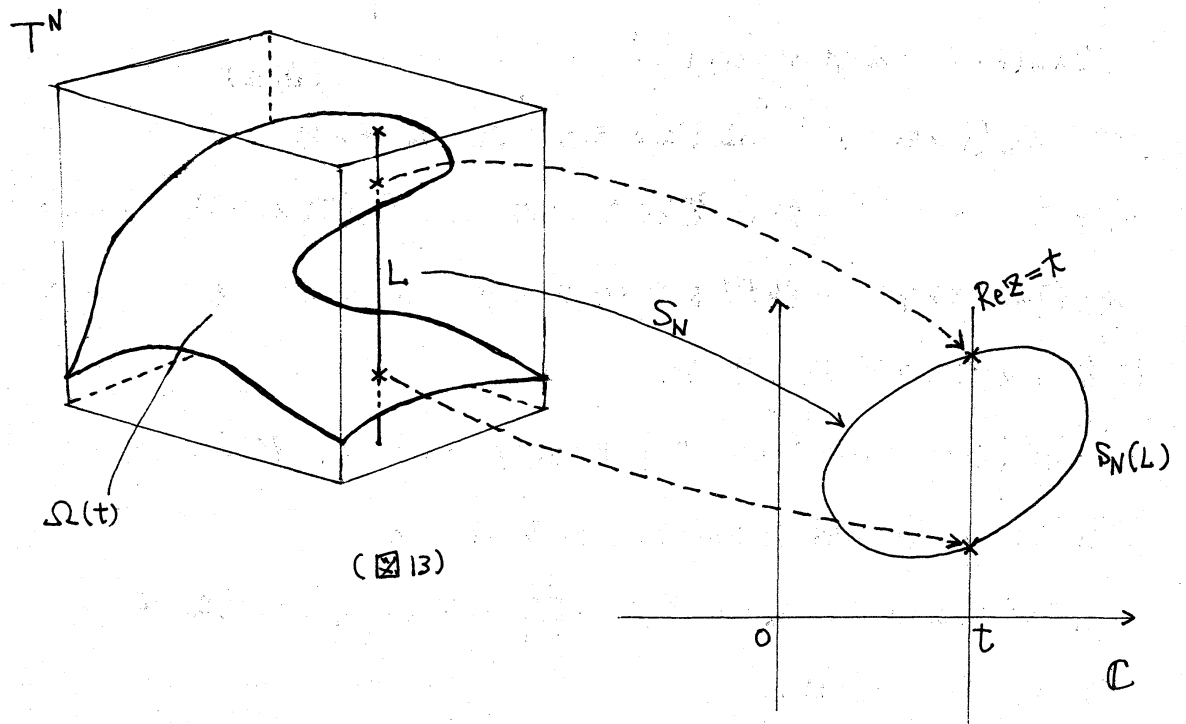
$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \log(1 - p_n^{-s_0} \cos 2\pi \theta_n) + t = 0 \quad (22)$$

を定義式にもつ超曲面である。

$\Omega(t)$  の  $(N-1)$  次元の測度を計算するために,  $[0, 1]^N$  の中に座標軸に平行な直線をひいてみる。即ち,  $\theta_1^0, \dots, \theta_{n-1}^0, \theta_{n+1}^0, \dots, \theta_N^0$  を勝手に固定し,  $L = \{(\theta_1^0, \dots, \theta_{n-1}^0, \theta_n, \theta_{n+1}^0, \dots, \theta_N^0) \in T^N \mid 0 \leq \theta_n < 1\}$  とする。このとき  $L$  の点に対しては,

$$S_N(\theta_1, \dots, \theta_N) = - \sum_{n=1}^N \log(1 - p_n^{-s_0} e^{2\pi i \theta_n})$$

において,  $n$  番目の頂のみが動いて凸閉曲線を描き, 他の頂は止まっているのだから,  $S_N(L)$  は  $\mathbb{C}$  内のひとつの凸閉曲線である。従って  $S_N(L) \cap \{\operatorname{Re} z = t\}$  は高々 2 点から成り, それをひき戻して,  $L \cap \Omega(t)$  も高々 2 点からなる。(図 13)



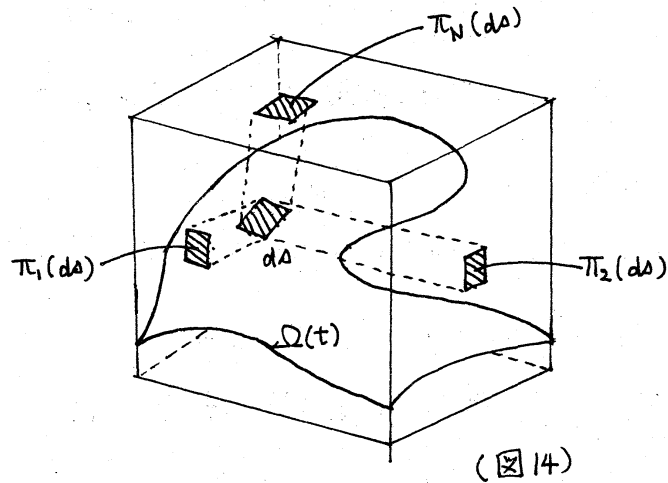
(図 13)

さて一方,  $\Omega(t)$  の各点  $\alpha$  における微小 ( $N-1$  次元) 体積  $d\alpha$  を考える。単位超立方体  $[0, 1]^N$  の各側面  $P(n) = \{(\theta_1, \dots, \theta_N) \in T^N \mid \theta_n = 0\} \ (1 \leq n \leq N)$  への射影を  $\pi_n$  と記し,

$$d\alpha \leq \sum_{n=1}^N \pi_n(d\alpha)$$

と評価する。(図14)

ところが, 逆にひとつの  $\pi_n(d\alpha)$  の立場から考えると, 図13で述べたことから, その点での微小体積の  $P(n)$  への射影が  $\pi_n(d\alpha)$



(図14)

へおちてくるような  $\Omega(t)$  の点は, 高々 2 点しかない。よって

$$m(\Omega(t)) = \int_{\Omega(t)} d\alpha \leq 2 \sum_{n=1}^N \int_{P(n)} \pi_n(d\alpha) = 2 \sum_{n=1}^N 1 = 2N. \quad (23)$$

厳密な定式化は [5] を参照されたい。

さて実際には,  $\Omega(t)$  は特異点をもつ可能性があり, そうなう所では上の議論は進行しなくなる。(22) の Jacobian を実際に計算してやると,  $\alpha = (\theta_1, \dots, \theta_N) \in T^N$  が  $\Omega(t)$  の特異点となるのは,  $(H)_n = -2\pi i p_n^{-\sigma_0} e^{2\pi i \theta_n} (1 - p_n^{-\sigma_0} e^{2\pi i \theta_n})^{-1}$  とおいて, すべての  $n \ (1 \leq n \leq N)$  に対して  $\operatorname{Re}((H)_n) = 0$  となる時に限ることがわかる。そこで正数  $\alpha$  に対して,  $T^N$  を次の 2 つの部分集合に分ける:

$$T_a^N = \{ (\theta_1, \dots, \theta_N) \in T^N \mid \sqrt{\sum_{n=1}^N (\operatorname{Re} \Theta_n)^2} > a \}$$

$$V_a^N = T^N - T_a^N = \{ (\theta_1, \dots, \theta_N) \in T^N \mid \sqrt{\sum_{n=1}^N (\operatorname{Re} \Theta_n)^2} \leq a \}$$

すると明らかに、 $T_a^N$  は  $\Omega(t)$  の特異点を含まないから、(23) を導出する議論はそこでは正当化され、正確には(23)ではなく、

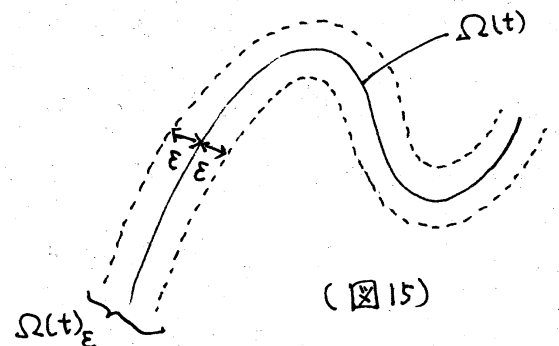
$$m(\Omega(t) \cap T_a^N) \leq 2N \quad (24)$$

が証明されるのである。

さて我々の目標は集合  $\Omega(t)_\varepsilon$  の measure の評価であるが、これを次のように考えてやる：

$$m(\Omega(t)_\varepsilon) \leq m(\Omega(t)_\varepsilon \cap T_a^N) + m(V_a^N). \quad (25)$$

この右辺第2項は、 $V_a^N$  の定義式から、 $O(a^N N^{2\alpha N})$  となることが比較的容易にわかる。他方第1項については、大雑把な言い方をすれば、 $\Omega(t)$  が“平坦な曲面”であれば、ほぼ  $m(\Omega(t)) \cdot 2\varepsilon$  程度で評価できるだろうと考えられる。(図15) よって(24)とあわせると、大体  $O(\varepsilon N)$  くらいの評価が期待できる。しかし  $\Omega(t)$  の中に“大きく曲っている点”があれば、そのような点の近傍では  $\Omega(t)_\varepsilon$  はもっと大幅にふくらむ可能性がある。し



かし  $Ta^N$  の中では, そのような "小くらみ" の度合が,  $Ta^N$  の定義そのものから,  $a^{-1}$  で評価できるのである。従って結論として,  $m(\Omega(t)_\varepsilon \cap Ta^N) = O(a^{-1} \varepsilon N)$  を得る。この部分も, 厳密な論法は [5] を見ていただくかねばならない。

以上の評価を (25) に代入し, パラメーター  $a$  を適当な値に之らぶことによつて,  $m(\Omega(t)_\varepsilon)$ , ひいては  $|m(R_2) - m(R_1)|$  の評価がえられる。それが (17) の右辺第1項である。

最後に, (21) の右辺の積分は, Koksma-Szüsz の不等式で評価する。ところが, Koksma-Szüsz (19) を適用してでてくるのは (19) の右辺の指数和を含む式でしかなく, 我々の目的のためにはその右辺をさらに計算しき, てやらねばならない。この部分も決して自明ではなく, 例えば M. Waldschmidt による超越数論の近年の結果, 即ち  $e^\pi$  の超越測度の下から, 評価 [11] が用いられる。しかし技術的な詳細はやはり [6] にゆずり, ここではこれ以上は立ち入らないことにしよう。いずれにしても, そうした計算を経て (17) の右辺第3項がえられ, そして証明が完成するのである。

(1985年9月22日)



## 文 献

- [1] H. Bohr - B. Jessen, Über die Wertverteilung der Riemannschen Zeta-funktion, Erste Mitteilung, Acta Math. 54 (1930) 1-35.
- [2] H. Bohr - B. Jessen, ———, Zweite Mitteilung, ibid. 58 (1932) 1-55.
- [3] H. Bohr - B. Jessen, Om Sandsynlighedsfordelinger ved Addition af konvekse Kurver, Dan. Vid. Selsk. Skr. Nat. Math. Afd. (8) 12 (1929) 1-82. = Collected Math. Works of Harald Bohr, vol. III, 325-406.
- [4] A. Good, On the distribution of the values of Riemann's zeta-function, Acta Arith. 38 (1981) 347-388.
- [5] K. Matsumoto - T. Miyazaki, On some hypersurfaces of high-dimensional tori related with the Riemann zeta-function, to appear.
- [6] K. Matsumoto, Discrepancy estimates for the value-distribution of the Riemann zeta-function (I), to appear.
- [7] K. Matsumoto, ——— (II), in "Number Theory and Combinatorics, Japan 1984", World Scientific (1985), to appear.
- [8] E.C. Titchmarsh, The theory of the Riemann zeta-function, Oxford (1951).
- [9] E.C. Titchmarsh, The theory of functions, 2-ed., Oxford (1939).
- [10] L. Kuipers - H. Niederreiter, Uniform distribution of sequences, Wiley (1974).
- [11] M. Waldschmidt, Une mesure de transcendance de  $e^\pi$ , Sémin. Delange-Pisot-Poitou, 17 (1975/76) G4, 5p.